

N81-27427

CALCUL DE L'INTERACTION ONDE-DE CHOC/COUCHE LIMITE
AVEC DECOLLEMENT

TM-75871

COMPUTATION OF THE SHOCK-WAVE BOUNDARY LAYER
INTERACTION WITH FLOW SEPARATION

Ardonceanu P.*, Alziary Th.** , Aymer D.***

Centre d'Etudes Aérodynamiques et Thermiques
43 Rue de l'Aérodrome
86000 Poitiers, France.

Résumé

Une nouvelle méthode de calcul de l'interaction onde de choc-couche limite est présentée. Le concept de couche limite est utilisé pour décrire l'écoulement à la paroi, l'écoulement externe est approximé par une relation pression-déviations (dièdre tangent en supersonique linéarisé).

Les équations de couche limite sont résolues en différences finies et la question de l'existence et de l'unicité de la solution est envisagée pour le problème direct (pression imposée) ou inverse (épaisseur de déplacement, coefficient de frottement imposés). De cette analyse ainsi que des considérations relatives au couplage visqueux-non visqueux, la quantité $\rho_e u_e \delta^*$ est choisie comme variable de raccordement.

L'algorithme de couplage présenté traite implicitement la condition limite aval nécessaire pour fermer correctement le problème de la couche limite en interaction. L'algorithme utilise une technique de linéarisation de Newton qui permet une convergence rapide. Un exemple d'application est donné.

* Attaché de Recherches, Centre National de la Recherche Scientifique

** Professeur, Université de Poitiers

*** Attaché de Recherches, Direction des Recherches Etudes et Techniques

A781-3

Abstract

A new method to compute the shock wave-boundary layer interaction is presented. The boundary layer concept is used to describe the viscous flow near the wall and the outer inviscid flow is calculated by a pressure-turning relation (tangent wedge or linearized supersonic) for simplicity.

The boundary layer equations are solved in finite difference form and the question of the existence and unicity of the solution is examined for the direct (pressure imposed) or inverse (displacement thickness, friction coefficient... imposed) problem. From the aforementioned analysis together with viscous-inviscid matching considerations a particular choice is made for the matching variable ($\rho_e u_e \delta^*$).

An algorithm is presented to converge the matched solution which implicitly includes the downstream condition necessary to close the interacting boundary layer problem. The algorithm makes use of a Newton linearization technique which is shown to provide a fast convergence. A typical example is presented.

NOTATIONS

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2} \quad \text{coefficient de frottement}$$

D	fonction d'amortissement
F	fonction de mélange amont/aval
K	coefficient d'expansion du maillage
P	pression externe
Pr	nombre de Prandtl = $\mu C_p / \lambda$
Pr_T	nombre de Prandtl turbulent
R	densité externe
Re	nombre de Reynolds = $\rho_\infty U_\infty X_c / \mu_\infty$
S	fonction de sensibilité (couplage)
u	vitesse longitudinale externe ou discrétisée
V	vitesse verticale externe ou discrétisée
X	coordonnée discrétisée
Y	coordonnée transformée y/ε ou discrétisée

h	enthalpie statique
l	longueur de mélange
p	pression interne
u	vitesse longitudinale interne
v	vitesse verticale interne
x	
y	coordonnées

$$\gamma = C_p / C_v \quad \text{fonction d'intermittence}$$

δ épaisseur de couche limite

δ^* épaisseur de déplacement

$$\varepsilon = R_e^{-1/2} \quad \text{ou viscosité turbulente}$$

$$\bar{\varepsilon} \quad \left(1 + \frac{\varepsilon}{\mu}\right)$$

$$\hat{\varepsilon} \quad \left(1 + \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{Pr}{Pr_T}\right)$$

$$\tau \quad \text{coefficient de frottement } \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

θ angle des lignes de courant

μ viscosité dynamique

ω coefficient de relaxation

ABCDE coefficients matriciels
 $\alpha\gamma\delta\varepsilon$

Indices

I	numérotation verticale du maillage
J	numérotation longitudinale du maillage
T	totale
c	charnière
e	variable externe
i	variable interne ou incompressible
k	indice d'itération
o	valeur externe
w	valeur à la paroi
∞	valeur à l'infini

I. INTRODUCTION

Diverses méthodes ont été proposées pour le calcul de l'interaction onde de choc/couche limite. Les plus anciennes basées sur la résolution des équations intégrales de couche limite sont encore couramment utilisées, malgré leur caractère approximatif, du fait de leur rapidité {1, 2, 3}. Plus récemment sont apparues des méthodes toujours basées sur la notion de couche limite mais résolues cette fois en différences finies {4, 5}, puis une solution des équations de Navier Stokes complète est devenue possible grâce à l'utilisation de moyens de calculs puissants et d'algorithmes efficaces {6, 7}.

La méthode de calcul présentée dans cet article a pour objectif principal d'étudier l'influence des modèles de turbulence sur la qualité des prévisions. Son application à des écoulements tridimensionnels est aussi envisagée. Ces deux objectifs paraissent pour l'instant difficilement compatibles avec une résolution directe des équations de Navier-Stokes qui semble à la limite des moyens actuels de calcul, au moins pour des maillages assez serrés. D'autre part, les méthodes intégrales, dont l'efficacité est bien démontrée, nécessitent un apport semi-empirique en plus de la modélisation de la turbulence et par conséquent il est difficile de tirer des conclusions sur la modélisation de la turbulence elle-même. La méthode choisie est de type couche limite mais résolue par différences finies, le caractère approché résidant alors seulement dans l'approximation de couche limite elle-même.

L'étude de la modélisation de la turbulence dans l'interaction onde de choc/couche limite a fait l'objet d'un travail expérimental {8} mais le calcul présenté est pour l'instant limité à un modèle de turbulence algébrique classique, un effort important ayant été accordé à l'optimisation du calcul de couche limite et de l'algorithme de couplage.

Dans le premier paragraphe on rappelle brièvement le principe de l'approche couche limite qui découle du comportement des équations de Navier Stokes aux grands nombres de Reynolds. Les divers modes de raccordement entre la couche limite et l'écoulement externe sont envisagés (à la paroi, en δ^* , en δ).

Le second paragraphe est consacré au calcul de la couche limite et en premier lieu au choix du mode de calcul, "direct" ou "inverse", et donc de la condition limite imposée à la couche limite. Cette étude, purement numérique, montre l'importance du choix de cette condition sur l'existence et l'unicité de la solution locale des équations de couche limite, en particulier au décollement.

L'analyse numérique du programme de calcul de couche limite est présentée dans le paragraphe suivant. La méthode d'intégration de la région décollée est également décrite ainsi que le modèle de turbulence algébrique utilisé.

Le quatrième paragraphe est entièrement consacré à l'algorithme de couplage entre la couche limite et l'écoulement extérieur. Une méthode originale a été développée. Il a été démontré {9} que pour être "bien posé" le problème de couche limite en interaction forte nécessite une condition limite aval. L'algorithme développé traite implicitement cette condition aval et optimise en même temps le processus itératif de couplage.

L'application de la méthode décrite à un cas d'interaction onde de choc/couche limite en écoulement supersonique est présentée en comparaison avec les résultats expérimentaux de LAW {10} et de divers calculs publiés à ce jour {5, 6, 7}. La prévision des distributions de pression pariétale et de C_f présente des divergences sensibles avec des résultats obtenus par méthode de Navier Stokes, en particulier au niveau de la pression "plateau". Il ne semble pas encore possible d'attribuer ces divergences au modèle de turbulence utilisé, à l'amélioration du maillage par rapport aux méthodes de Navier-Stokes, ou à l'approximation de couche limite.

II. CONDITIONS DE RACCORDEMENT ENTRE LA COUCHE LIMITE ET L'ECOULEMENT EXTERNE

II.1. Généralités

La méthode de calcul présentée dans cet article est de type couche limite, c'est-à-dire que l'on admet implicitement que les effets visqueux contenus dans les équations de Navier-Stokes sont confinés dans

une petite région proche de la paroi à l'extérieur de laquelle le fluide peut être correctement décrit par les équations d'Euler. Cette structure des couches visqueuses à des nombres de Reynolds élevés est observée expérimentalement depuis très longtemps mais une formulation mathématique rationnelle du comportement des équations de Navier-Stokes lorsque $Re \rightarrow \infty$ n'a été publiée que beaucoup plus tardivement [11, 12].

La méthode des développements asymptotiques raccordés consiste à chercher une solution régulière au voisinage de $\epsilon = 0$, $\epsilon = Re^{-1/2}$ caractérisant les effets visqueux. On recherche donc une solution interne valide au voisinage de la paroi et une solution externe valide partout ailleurs. Les développements asymptotiques externes :

$$\begin{aligned} U(x,y,\epsilon) &= U_1(x,y) + \epsilon U_2(x,y) + O(\epsilon^2) \\ V(x,y,\epsilon) &= V_1(x,y) + \epsilon V_2(x,y) + O(\epsilon^2) \\ R(x,y,\epsilon) &= R_1(x,y) + \epsilon R_2(x,y) + O(\epsilon^2) \\ P(x,y,\epsilon) &= P_1(x,y) + \epsilon P_2(x,y) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (1)$$

sont introduits dans les équations de Navier-Stokes et fournissent au premier ordre les équations d'Euler, et au deuxième ordre une forme de petites perturbations des équations d'Euler.

Les développements limités valides au voisinage de $y = 0$ sont introduits de la même manière après une transformation de la variable normale à la paroi définie par :

$$Y = y/\epsilon \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mu(x,y,\epsilon) &= \mu_1(x,Y) + \epsilon \mu_2(x,Y) + O(\epsilon^2) \\ v(x,y,\epsilon) &= \epsilon v_1(x,Y) + \epsilon^2 v_2(x,Y) + O(\epsilon^3) \\ \rho(x,y,\epsilon) &= \rho_1(x,Y) + \epsilon \rho_2(x,Y) + O(\epsilon^2) \\ p(x,y,\epsilon) &= p_1(x,Y) + \epsilon p_2(x,Y) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3)$$

(la forme particulière du développement de v est imposée par l'équation de continuité).

L'injection de ces développements dans les équations de Navier-Stokes fait apparaître au premier ordre les équations de couche limite de Prandtl qui apparaissent donc comme une approximation à l'ordre 1 des équations de Navier-Stokes et au deuxième ordre une forme de petite perturbation des équations de Prandtl (en l'absence de courbure).

II.2. Relations de couplage

Les conditions de raccordement entre la solution interne et la solution externe fournissent les relations de couplage aux divers ordres d'approximation {12, 13}. Lorsqu'il s'agit d'une interaction "faible" la solution externe d'ordre 1 peut être calculée en utilisant la condition de glissement à la paroi ($V(x,0) = 0$). La solution interne est ensuite calculée puis la solution externe d'ordre 2 et ainsi de suite suivant le principe de la hiérarchie de la solution externe (fig. 1).

Ce processus tombe en défaut lorsque des chocs apparaissent dans la solution externe d'ordre 1 ($dP/dx \rightarrow \infty$) ou un décollement dans la couche limite d'ordre 1 ($d^2\delta^*/dx^2 \rightarrow \infty$). Ce type de singularité peut être évité en considérant simultanément les effets d'ordre 1 et 2 à l'extérieur avec la couche limite d'ordre 1 (fig. 2). Cette méthode de couplage relative aux interactions "fortes" fournit la relation de raccordement sur \bar{V} :

$$V^*(x,0) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \epsilon (v_1(x,Y) - Y \frac{\partial V^*}{\partial y}(x,0)) + O(\epsilon^2) \quad (4)$$

ou V^* désigne la solution externe d'ordre 1 et 2 définie par :

$$V^* = V_1 + \epsilon V_2$$

En utilisant l'équation de continuité la relation (3) peut être écrite sous la forme bien connue :

$$RV(x,0) = \frac{d}{dx} (RU(x,0) * \delta^*) \quad R = \text{densité dans l'écoulement externe} \quad (5)$$

Si l'on cherche à écrire cette relation à $y = \delta^*$ par un développement limite au voisinage de $y = 0$:

$$RV(x, \delta^*) = RV(x,0) + \delta^* \frac{\partial RV}{\partial y}(x,0) + \dots$$

et en appliquant l'équation de continuité la relation de couplage s'écrit :

$$RV(x, \delta^*) = RU(x,0) \frac{d\delta^*}{dx}$$

soit en approximant $RU(x, \delta^*)$ par $RU(x,0)$

$$RV(x, \delta^*) = RU(x, \delta^*) * \frac{d\delta^*}{dx}$$

ou

$$\left(\frac{V}{U}\right)_{y=\delta^*} = \frac{d\delta^*}{dx} \quad (6)$$

On peut de la même manière obtenir une relation de couplage en $y = \delta$ {14}.

L'avantage évident du couplage en δ^* est que la surface de déplacement apparaît comme une ligne de courant pour l'écoulement extérieur. Par contre dans le couplage en paroi, la couche limite joue le rôle d'une distribution de sources placées à la surface {12} et il y a par conséquent échange de fluide entre la couche limite et l'écoulement extérieur (fig. 3). Cette perméabilité de la couche limite pose un problème de raccordement lorsque le fluide externe ne vérifie pas la condition isentropique valable à l'extérieur de la couche limite. Cette incohérence ne semble pas cependant remettre en cause la procédure puisque des conditions de raccordement supplémentaires peuvent être fournies par l'étude du raccordement de la couche limite du second ordre {26}.

Une difficulté associée à la notion de surface de déplacement et donc au couplage en δ^* est le comportement supersonique de la couche limite au delà d'un nombre de Mach de l'ordre de 1.4 pour une couche limite turbulente {15}. La couche limite raccordée à l'écoulement externe en δ^* ne permet pas alors la naissance du phénomène d'auto-induction et les solutions de branchement correspondant à l'interaction forte n'apparaissent pas. La technique couramment utilisée consiste à appliquer à la couche limite une discontinuité (jump supercritique-subcritique) pour développer des solutions d'interaction forte. Le caractère empirique de cette méthode peut être évité en prolongeant l'écoulement externe à la paroi. LE BALLEUR {16} a montré que le couplage en paroi, qui découle directement de la méthode des développements asymptotiques raccordés, garantit, au moins dans une plage étendue de nombres de Mach, le comportement subcritique de la couche limite en interaction. Malgré les difficultés liées à la perméabilité de la couche limite, ce type de couplage a été préféré pour éviter le recours à la technique du "jump".

III. CALCUL DE LA COUCHE LIMITE

III.1. Introduction

Parmi les problèmes liés au calcul de la couche limite soumise à de forts gradients, on peut citer celui de la modélisation de la turbulence d'une part et d'autre part le calcul du décollement qui implique

une modification du mode d'intégration, la couche limite n'ayant plus dans ce cas le caractère purement parabolique d'une couche limite attachée.

Par opposition aux méthodes de calcul dites "directes" dans lesquelles le gradient de pression est imposé à la couche limite {17} sont apparues des méthodes "inverses" {18, 19} le gradient de pression étant alors le résultat de l'intégration des équations avec une condition limite externe telle que l'épaisseur de déplacement δ^* ou le coefficient de frottement pariétal C_f . Le choix de la condition externe à prescrire est important et la question de l'existence et de l'unicité de la solution du problème de couche limite doit être envisagée pour les différents modes d'intégration.

III.2. Choix de la condition limite

Lors des itérations de couplage entre la couche limite, on est amené à imposer des conditions "non physiques" à la couche limite et le problème se pose de savoir si à une abscisse donnée X_{J+1} le problème de la couche limite a une et une seule solution pour toute valeur de la condition imposée. Afin de répondre à cette question la procédure suivante a été mise en oeuvre : la couche limite est calculée jusqu'à l'abscisse X_J et au point X_{J+1} on fait varier la condition imposée {10}. L'état de la couche limite au point J conditionne en partie le résultat et le calcul a été reproduit pour différentes situations (couche limite accélérée, ralentie ou à gradient de pression nul jusqu'à X_J). Pour connaître le comportement de la solution, décollement inclus, le calcul est effectué soit en méthode inverse (δ^* prescrit) lorsque l'écoulement est décollé soit en méthode directe lorsque l'écoulement est attaché.

Les termes de convectifs ($\rho u \frac{du}{dx}$ et $\rho u \frac{\partial h}{\partial x}$) sont négligés lorsque la couche limite est décollée afin de préserver la stabilité du calcul. (Approximation suggérée par Flugge Lotz et Reyhner {21}). Le résultat présenté fig. 4 est relatif à une couche limite turbulente "supercritique" ($M = 2.96$). La procédure de calcul est la même que celle décrite au paragraphe III.3.

En abscisse est porté le rapport $p(X_{J+1})/p(X_J)$ et en fonction de cette variable est représentée la variation du C_f , de δ^* et

$\rho_e u_e^* \delta^*$, et de $\rho_e v_e$ c'est à dire le flux de masse qui entre ou sort de la couche limite.

La première constatation est l'existence d'un rapport de pression maximal entre les points J et J+1, le maximum correspondant grossièrement au décollement de la couche limite. Une fois le décollement naissant dépassé, la pression diminue légèrement lorsque la couche limite est plus décollée. Ce résultat est observé quel que soit l'état initial de la couche limite, qualitativement du moins, et montre que :

- 1°/ le problème direct (grad p imposé) n'a pas toujours de solution
- 2°/ au voisinage du décollement il existe une solution double

Ainsi le problème de la singularité au décollement peut être facilement relié à un problème d'existence et d'unicité de la solution et l'utilisation de méthodes directes pour calculer des couches limites décollées paraît assez dangereuse.

Si l'on considère maintenant le C_f comme variable imposée à la couche limite on observe que le C_f décroît de manière monotone jusqu'au décollement et qu'en ce point la dérivée $dC_f(J+1)/dp(J+1)$ est infinie. Dans le domaine décollé le C_f présente une décroissance monotone jusqu'à une valeur limite inférieure et ensuite augmente légèrement. Notons que rechercher une solution par méthode inverse consiste à rechercher l'intersection de la courbe avec une droite horizontale. On peut en conclure que le décollement est facilement franchissable à C_f prescrit mais que là encore un problème d'existence et d'unicité se pose pour de forts décollements.

La variable $\rho_e v_e$ est indiquée mais vu l'allure de la courbe $\rho_e v_e(J+1) = f(p(J+1))$ qui présente presque un point de rebroussement, l'emploi de $\rho_e v_e$ comme variable est à proscrire absolument.

Restent les deux variables basées sur l'épaisseur de déplacement δ^* et le produit $\rho_e u_e^* \delta^*$. (Fig.4). La pente négative de la courbe $\delta^*(J+1) = f(p(J+1))$ est symptomatique d'un écoulement supercritique.

En effet, une couche limite supercritique est caractérisée par son inaptitude à générer son propre gradient de pression [22]. Si

une perturbation externe entraîne une augmentation de l'épaisseur de déplacement soit $d\delta^*/dx > 0$, le gradient de pression correspondant est négatif ($grad p < 0$). Ceci conduit à un amortissement de la pression initiale et la solution couplée ne se branche pas sur des solutions de forte interaction {22}.

Notons néanmoins qu'au delà d'une certaine compression la dérivée $d\delta^*(J+1)/dp(J+1)$ redevient positive et les techniques de "jump" consistent à passer artificiellement de la branche supercritique à la branche subcritique (II.2).

En ce qui concerne le calcul de couche limite proprement dit il n'a pas été possible de calculer la couche limite à δ^* prescrit dans la branche subcritique et de plus un tel calcul serait sujet à caution étant donné l'existence d'une solution double. Par contre dans la branche plus verticale (décollement naissant et décollement franc) le calcul à δ^* prescrit ne pose pas de problème, la solution existe et est unique même pour de très forts décollements.

L'utilisation de $\rho_e u_e \delta^*$ comme variable est plus avantageuse car la branche supercritique n'existe pas $d\rho_e u_e \delta^*(J+1) / dp(J+1)$ est toujours positif et dans le décollement la solution est bien définie, comme pour δ^* .

Le couplage en paroi faisant intervenir $(\rho_e u_e \delta^*)$ et non δ^* seul, ainsi que l'absence de branche supercritique dans la solution locale du problème de couche limite, conduisent donc naturellement à utiliser $\rho_e u_e \delta^*$ comme quantité à imposer à la couche limite.

III.3. Intégration numérique des équations de couche limite

Le système d'équations à résoudre est le suivant :

$$\left. \begin{aligned} \text{a/} \quad \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho \tilde{v}}{\partial y} &= 0 & (\tilde{v} &= v + \frac{\rho' v'}{\bar{\rho}}) \\ \text{b/} \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial y} &= \rho_e u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{R_e} \hat{e} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \text{c/} \quad \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho \tilde{v} \frac{\partial h}{\partial y} &= -u \rho_e u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{R_e P_r} \hat{e} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{R_e} \hat{e} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 d/ \quad & \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\
 e/ \quad & \int_0^{\infty} (\rho_e u_e - \rho u) dy = \rho_e u_e \delta^* = f(x) \text{ donné} \\
 f/ \quad & \frac{p}{\rho} = \frac{h}{\gamma - 1} \\
 & \text{avec les conditions aux limites suivantes} \\
 & u(x, 0) = v(x, 0) = 0 \text{ adhérence} \\
 g/ \quad & \frac{\partial h}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad \text{paroi adiabatique} \\
 & h_e + \frac{u_e^2}{2} = h_T \quad \text{enthalpie totale constante à l'extérieur}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Le modèle de turbulence $\bar{\epsilon}, \hat{\epsilon}$ est de type algébrique et sera discuté ultérieurement (III.5).

Les équations sont écrites sous forme adimensionnelle mais en variables non transformées afin de se prêter facilement à l'emploi de modèles de turbulence plus complexes que les modèles algébriques. Les variables principales choisies sont u et h et les termes contenant soit p soit ρ sont exprimés en fonction de h et h_e (enthalpie à l'extérieur de la couche limite). Les équations sont ensuite complètement linéarisées et écrites sous forme de différences finies du second ordre en x et y . Une formulation implicite est évidemment adoptée pour sa stabilité.

La condition intégrale $\int (\rho_e u_e - \rho u) dy = f(x)$ est traitée simultanément avec les équations de quantité de mouvement selon x et d'énergie. Contrairement aux méthodes directes la pression et par conséquent ρ_e sont traitées comme des inconnues. L'intégration simultanée des équations de quantité de mouvement et d'énergie est imposée par la présence de ρ et u dans l'expression de $\rho_e u_e \delta^*$.

Une intégration successive de l'équation de quantité de mouvement et d'énergie imposerait une solution itérative de l'équation

$$\begin{aligned}
 a/ \quad & \int (\rho_e u_e - \rho u) dy = f(x) \quad \text{du type} \\
 b/ \quad & \int (\rho_e^{k-1} u_e^k - \rho^{k-1} u^k) dy = f(x) \quad \text{où } k \text{ désigne l'indice d'itération sur les termes non linéaires}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Cette procédure qui consiste à intégrer l'équation de quantité de mouvement avec la relation intégrale 8b/ ne permet pas le calcul de régions décollées à des nombres de Mach élevés car le signe de $\frac{df(x)}{dp(x,y)}$ dépend du nombre de Mach local $M(x,y)$ alors que $\frac{df(x)}{du(x,y)}$ est toujours négatif.

La relation (8.a) est donc résolue avec les termes faisant intervenir u et p (donc h et h_e) sous forme explicite et linéarisée complètement suivant le principe $((AB)^+ = AB + (A^+ - A)B + A(B^+ - B))$

La structure générale de la matrice pour un profil donné est représentée fig. 5. Chaque terme représente une matrice 2×2 . Le vecteur représentant la solution est écrit sous la forme

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} U(1) \\ H(1) \\ U(2) \\ H(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ U(NDIM) \\ H(NDIM) \end{pmatrix} \quad (9)$$

La matrice est de type tridiagonale avec en plus une ligne et une colonne. La dernière ligne est utilisée pour écrire la relation intégrale 7c/ alors que la colonne représente l'inconnue $u(NDIM) = u_e$ et $H(NDIM) = h_e$.

Chaque ligne est donc de la forme :

$$|A(I)| * \begin{pmatrix} U(I-1) \\ H(I-1) \end{pmatrix} + |B(I)| * \begin{pmatrix} U(I) \\ H(I) \end{pmatrix} + |C(I)| * \begin{pmatrix} U(I+1) \\ H(I+1) \end{pmatrix} + |G(I)| * \begin{pmatrix} U(NDIM) \\ H(NDIM) \end{pmatrix} = (D(I)) \quad (10)$$

la dernière ligne s'écrivant :

$$\sum_{I=1}^{NDIM} |E(I)| * \begin{pmatrix} U(I) \\ H(I) \end{pmatrix} = (D(NDIM)) \quad (11)$$

La résolution est effectuée par un algorithme de substitution dérivé de l'algorithme de THOMAS [23]. Dans un premier temps, la matrice est mise sous la forme présentée fig.6, où (I) est la matrice unité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les coefficients $|\alpha|$ $|\gamma|$ et (δ) sont donnés par les relations de substitution :

$$\begin{aligned}
|\alpha(I)| &= |G(I)| * (|B(I)| - |A(I)| * |\alpha(I-1)|)^{-1} \\
|\gamma(I)| &= (|G(I)| - |A(I)| * |\gamma(I-1)|) * (|B(I)| - |A(I)| * |\alpha(I-1)|)^{-1} \\
(\delta(I)) &= ((D(I)) - |A(I)| * (\delta(I-1))) * (|B(I)| - |A(I)| * |\alpha(I-1)|)^{-1}
\end{aligned} \quad (12)$$

La deuxième ligne est elle-même réduite par une relation de substitution.

$$\begin{aligned}
|\epsilon(I)| &= |E(I)| - |\epsilon(I-1)| * |\alpha(I-1)| \\
|\epsilon(NDIM)| &= |E(NDIM)| - \sum_{I=1}^{NDIM-1} |\epsilon(I)| * (\delta(I)) \\
(\delta(NDIM)) &= (D(NDIM)) - \sum_{I=1}^{NDIM-1} |\epsilon(I)| * (\delta(I))
\end{aligned} \quad (13)$$

Dans un second temps le vecteur \vec{X} est calculé par résolution de la matrice en commençant par la dernière ligne et en remontant. Les termes non linéaires sont résolus pour chaque profil avant de calculer le suivant en itérant jusqu'à convergence. Une sous-relaxation est nécessaire au moins pour les profils décollés et la valeur relaxée du vecteur X à l'itération k est donnée par

$$\vec{X} = \vec{X}^k + (1-\omega)\vec{X}^{k-1}$$

Le coefficient de relaxation est choisi égal à 0.5 ce qui correspond à une optimisation pour l'intégration d'une couche limite comportant des profils décollés. La valeur de ω peut être prise égale à 0.8 ou 0.9 si la couche limite est complètement attachés. Le test de convergence est effectué sur les $U(1) \dots U(NDIM)$ et l'itération arrêtée lorsque

$$\frac{U^k(I) - U^{k-1}(I)}{U^k(NDIM)} < .0001 \quad \text{pour tous les } I.$$

Le nombre moyen d'itérations par profil est de l'ordre de 25 pour le cas de calcul présenté. Ce nombre doit pouvoir être nettement réduit par l'utilisation de modèles de turbulence ne comportant pas de termes du genre $|\frac{\partial u}{\partial y}|$ ou basés sur τ_w ce qui n'est pas sans poser des problèmes lorsque $\tau_w \rightarrow 0$ (Cf. III.5).

III.4. Intégration dans la région décollée

En l'absence de décollement l'intégration de la couche limite dont les équations sont de type parabolique s'effectue dans le sens de x croissant, le résultat étant entièrement fonction des valeurs initiales et des conditions aux limites. Le caractère parabolique en $+x$ est perdu dans le décollement car les termes $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\rho u \frac{\partial h}{\partial x}$ changent de signe ce qui autorise une influence de l'aval vers l'amont. Les équations sont encore de type parabolique dans les régions décollées mais dans le sens des x décroissants.

Trois solutions sont possibles pour traiter cette influence de l'aval vers l'amont :

- 1/ l'approximation proposée par Flugge Lotz et Reyhner
- 2/ le changement du sens d'intégration dans la région décollée
- 3/ les balayages successifs de toute la couche limite en modifiant les molécules de différences finies dans les régions décollées

a) Approximation de Flugge Lotz et Reyhner {21}

Cette approximation consiste simplement à négliger les termes convectifs en x lorsque la vitesse longitudinale devient négative. Ceci permet de préserver le caractère parabolique en $+x$ et d'intégrer la couche limite en un seul balayage en x . Les termes

$\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\rho u \frac{\partial h}{\partial x}$ sont transformés en

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{u+|u|}{2} \right) \frac{du}{dx} \\ \rho \left(\frac{u+|u|}{2} \right) \frac{dh}{dx} \end{aligned} \tag{14}$$

qui s'annulent donc lorsque $u < 0$. Cette méthode, très utile pour initialiser une distribution de vitesse dans la couche limite ou pour calculer de faibles décollements, pose néanmoins des problèmes de convergence pour de forts décollements. Elle n'a de plus qu'un caractère approximatif, assez raisonnable en écoulement laminaire où les vitesses de retour sont faibles, beaucoup plus contestable en turbulent où des vitesses de retour de $\sim 0.2 u_e$ sont rencontrées.

b) Changement du sens d'intégration dans la région décollée

La solution adoptée par CEBECI {24} d'intégrer l'extérieur du bulbe de l'amont vers l'aval et le bulbe de l'aval vers l'amont et d'itérer jusqu'à convergence du champ global est certainement la plus efficace sur le plan du temps de calcul. Cependant l'algorithme est relativement complexe. De plus dans un calcul couplé couche limite/fluide parfait, des itérations de couplage sont imposées et cette propriété peut être utilisée pour converger à la fois le bulbe de décollement et la solution couplée.

c) Balayages successifs amont-aval

L'influence de l'aval vers l'amont est dans ce cas rendue possible par la modification du type de différenciation ("backward" si $u(x,y) > 0$ "forward" si $u(x,y) < 0$) des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial x}$. Pour stabiliser la frontière $u(x,y) = 0$ une différenciation centrée est appliquée lorsque $|u(x,y)| < u_m$. La remontée des perturbations de l'aval vers l'amont n'excède pas alors 2 mailles par iteration pour un schéma du second ordre et un nombre d'itérations important doit être effectué (l'ordre de grandeur est donné par le nombre de profils décollés). Cet inconvénient par rapport à la deuxième méthode n'est pas critique lorsque des itérations de couplage sont à envisager. Le mode de différenciation adopté est le suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{F+1}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_b + \frac{F-1}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_f \quad (15)$$

avec

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_b = \frac{3U(J,I) - 4U(J-1,I) + U(J-2,I)}{2\Delta x}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_f = \frac{-3U(K,I) + 4U(J+1,I) - U(J+2,I)}{2\Delta x}$$

la fonction F assurant le mélange amont aval étant définie par :

$$F(J,I) = \frac{U(J,I)}{|U(J,I)|} * (1 - \exp(-\frac{|U(J,I)|}{u_m})) \quad (16)$$

La vitesse de référence u_m est égale à :

$$u_m = .02 * u_e$$

Une transition "douce" entre les deux modes de différenciation évite une oscillation de la ligne $u(x,y) = 0$ au cours des itérations de convergence des termes non linéaires. La vitesse de référence est choisie suffisamment petite pour éviter de prendre en compte des dérivées aval pour des profils bien attachés.

III.5. Modèle de turbulence

Le modèle algébrique de turbulence est un modèle à deux couches classiques. Les termes $\bar{\epsilon}$ et $\hat{\epsilon}$ apparaissant dans 7b et c sont donnés par :

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon} &= 1 + \frac{\epsilon}{\mu} \\ \hat{\epsilon} &= 1 + \frac{\epsilon}{\mu} * \frac{Pr}{Pr_t}\end{aligned}\tag{17}$$

où ϵ désigne la viscosité turbulente, le nombre de Prandtl est pris égal à 0.725 et le rapport au nombre de Prandtl turbulent est de $Pr/Pr_t = 0.80$.

Le modèle externe ϵ_o est donné par :

$$\epsilon_o = .0168 u_e * \delta_i^* \tag{18}$$

δ_i^* est l'épaisseur de déplacement incompressible comptée à partir de l'ordonnée y où la vitesse s'annule dans le cas d'un profil décollé

$$\delta_i^* = \int_{y(u=0)}^{y_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \tag{19}$$

La fonction d'intermittence γ est représentée par

$\gamma = (1 + 5.5(y/\delta)^6)^{-1}$ δ étant l'épaisseur de couche limite à $0.99 u_e$. Contrairement aux calculs effectués avec les équations de Navier-Stokes complètes où la vitesse varie à l'extérieur de la couche limite [7] et où des chocs prennent naissance au voisinage de $y = \delta$, la frontière δ est bien définie.

Le modèle interne est de type longueur de mélange

$$\epsilon_i = l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|$$

avec $l = 0.4 y D$

où D est le facteur d'amortissement de Van Driest donné par l'expression

$$D = 1 - e^{-y/y_s} \quad y_s = \text{épaisseur de la sous couche "laminaire"}$$

$$y_s = \frac{26\mu}{\sqrt{x|\tau_\omega|}}$$

Le modèle de turbulence ainsi défini n'a pas fait l'objet de tentative d'optimisation. Il est qualifié de modèle "d'équilibre" suivant la terminologie de SHANG et HANKEY et de MAC CORMACK {6, 7}.

IV. ALGORITHME DE COUPLAGE

IV. Calcul de l'écoulement externe

Bien que le mode de calcul de couche limite soit de type inverse, la relation de couplage permet d'utiliser indifféremment une méthode directe ou inverse pour le calcul de l'écoulement externe. Il est prévu de coupler le présent calcul de couche limite à un calcul externe en méthode des caractéristiques. On utilise actuellement une relation pression déviation donnée par :

$$P = P_\infty (1 + A\theta + B\theta^2 + C\theta^3) \quad (22)$$

où θ est l'angle de l'écoulement externe prolongé en paroi et déduit de la relation de couplage (17) :

$$\theta = \frac{RV}{RU}(x,0) = \frac{d\delta^*}{dx} + \frac{\delta^*}{RU(x,0)} \frac{d}{dx} RU(x,0)$$

soit

$$\theta = \frac{d\delta^*}{dx} + \frac{\delta^*}{\rho_e u_e} \frac{d\rho_e u_e}{dx} \quad (23)$$

Ces coefficients dans le développement limité (22) sont respectivement égaux à :

$$A = \frac{\gamma M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$B = \frac{M_\infty^2}{\gamma + 1} \quad (24)$$

$$C = \frac{1}{2} \gamma \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 M_\infty^2 \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

IV.2. Méthode de couplage

L'algorithme de couplage a pour fonction de permettre de calculer la distribution de pression qui satisfait simultanément les équations de la couche limite et celles de l'écoulement externe, les deux écoulements étant reliés par la relation de couplage (17).

De nombreuses procédures existent mais les méthodes paraissent assez laborieuses. Bien que la couche limite soit de nature parabolique et que dans le cas d'un écoulement externe supersonique les équations d'Euler soient hyperboliques, le problème couplé nécessite une condition à la limite aval pour être correctement posé [9, 13]. Cette constatation rappelle le caractère initialement elliptique des équations de Navier-Stokes. Le couplage entre les deux régions externe et interne autorise en effet la remontée de l'information ce qui implique l'existence d'une condition à la limite aval pour fermer complètement le problème.

L'algorithme proposé par VERLE et VATSA [4] qui prend automatiquement en compte cette condition aval par l'intermédiaire de l'équation de quantité de mouvement écrite à la paroi constitue une amélioration sensible par rapport aux méthodes de "tir" précédemment utilisées. La méthode paraît mal adaptée au calcul de couches limites décollées (calcul direct de la couche limite) et son application à une couche limite supercritique avec couplage en δ^* a jeté un doute sur la validité des méthodes de couche limite en interaction [5].

La présente méthode comme celle de VERLE et VATSA traite implicitement la condition à la limite aval et optimise le nombre d'itérations de couplage. Elle est applicable aux calculs directs ou inverses, et est présentée ici sous la formulation "mixte" (CL inverse, ext direct).

Soit k l'indice d'iteration de couplage. Une estimation du gradient de pression en un point dans la couche limite à l'iteration $k+1$ en fonction de l'angle θ de couplage peut être fournie par la relation :

$$\text{grad } p^{k+1} = \text{grad } p^k + \frac{\partial \text{grad } p^k}{\partial \theta^k} (\theta^{k+1} - \theta^k) \quad (25)$$

De la même manière on peut relier la pression externe p^{k+1} à l'angle θ^{k+1} en linéarisant la relation pression/déviation (22).

$$p^{k+1} = p^k + AP_{\infty} (\theta^{k+1} - \theta^k) \quad (26)$$

Les angles θ ainsi que les gradients de pression dans la couche limite étant calculés entre les mailles (dérivation en deux points) la pression externe p doit elle même être définie à la demi-maille soit :

$$p^{k+1}(J + \frac{1}{2}) = \frac{p^{k+1}(J) + p^{k+1}(J+1)}{2} \text{ etc....}$$

Les distributions de pression externes et internes devant être identiques à l'itération $k+1$, on doit donc vérifier $p^{k+1}(J) = p^{k+1}(J)$.

Les relations (25) et (26) peuvent être combinées en éliminant θ ce qui donne sous forme discrétisée :

$$\frac{p^{k+1}(J) - p^{k+1}(J-1) - (p^k(J) - p^{k+1}(J-1))}{\Delta x * \left. \frac{\partial \text{grad } p}{\partial \theta} \right|_k} = \frac{p^{k+1}(J) + p^{k+1}(J-1) - (p^k(J) + p^k(J-1))}{2 AP_{\infty}}$$

ou en notant S le rapport

$$S = \frac{\Delta x * \left. \frac{\partial \text{grad } p}{\partial \theta} \right|_k}{2 AP_{\infty}} \quad (27)$$

la précédente relation s'écrit :

$$p^{k+1}(J-1) = \frac{p^k(J) * (1-S) - (p^k(J) - p^k(J-1)) + 2 * S * (p^k(J) + p^k(J-1))}{S+1} \quad (28)$$

Cette relation permet d'estimer à la maille $J-1$ la pression p^{k+1} qui doit satisfaire les équations de couche limite et de l'écoulement extérieur. Sachant que de plus on impose que la pression aval soit égale à une certaine valeur P_{∞} , la relation (28) intégrée de l'aval vers l'amont fournit une nouvelle distribution de pression $p^{k+1}(J=1 \dots JMAX)$.

Dans le présent calcul la couche limite est calculée en méthode inverse et donc, connaissant $p^{k+1}(J)$, il est facile de recalculer θ^{k+1} à partir d'une des relations (25) ou (26). La nouvelle distribution de $\rho_e u_e \delta^*$ est redéfinie par l'intégration de l'amont vers l'aval de la distribution θ^{k+1}

$$\rho_e u_e \delta^{*k+1}(x) = \rho_e u_e \delta^*(x_0) + \int_{x_0}^x \theta(x) dx \quad (29)$$

Le profil initial est perturbé sa pression devant être égale à $p^{k+1}(1)$ mais le produit $\rho_e u_e \delta^*$ est maintenu constant. On retrouve ainsi la solution de faible interaction, dans la mesure où la forme du profil initial est compatible avec cette solution. En tout état de cause un profil de type plaque plane fournit une bonne approximation.

La présente méthode se révèle extrêmement rapide pour les interactions ne conduisant pas au décollement de la couche limite (15 à 20 itérations) (fig.7). Une sous relaxation est nécessaire pour des calculs

incluant des décollements du fait d'une part de la non linéarité des courbes $\rho_e u_e \delta^*/p$ au voisinage du décollement (fig.4) et d'autre part parce que le bulbe de décollement est intégré par des balayages successifs et que donc les distributions de $\rho_e u_e \delta^*$ ne doivent pas varier trop d'une itération à l'autre. Le nombre d'itération nécessaire est alors de 30 à 40.

IV.3. Calcul de la dérivée $S = \frac{d \text{ grad } p}{d\theta}$

La linéarisation de la relation du comportement local de la couche limite utilisée pour l'accélération de la convergence de la méthode de couplage nécessite la connaissance du terme $S(x) = \frac{d \text{ grad } p}{d\theta}$ (Cf relation 28).

Notons que pour une couche limite de caractère strictement parabolique (attachée) la solution en un point donné $x = X_J$ dépend, outre des conditions initiales, de la distribution en x de la condition à la limite, soit en méthode inverse de $\rho_e u_e \delta^*$ de $x = X_1$ à $x = X_J$:

$$p(X_J) = (\rho_e u_e \delta^*(X_L)), L = 1, \dots, J \quad (30)$$

L'optimisation idéale du processus itératif de couplage imposerait la connaissance des dérivées (Jacobien)

$$\frac{dp_J}{d\rho_e u_e \delta_L^*} \quad \text{pour } L = 1, \dots, J \quad (31)$$

ce qui conduirait au calcul de J^2 termes. La linéarisation de la relation $\text{grad } p(J)/\theta(J)$ revient donc à ne considérer que les deux diagonales principales de la relation (31). Si k est l'indice de l'itération de couplage la pression en J à l'itération $k+1$ est estimée par :

$$p^{k+1}(J) = p^{k+1}(J-1) + S^k(J)(\theta^{k+1}(J) - \theta^k(J)) \quad (32)$$

On observe pratiquement que la convergence est assurée sans relaxation sur la distribution de $\theta(J)$ donc de $\rho_e u_e \delta^*(J)$ lorsque la couche limite est attachée. Par contre lorsque le décollement se produit la dérivée $S(J)$ change de signe dans les régions décollées et une sous relaxation paraît alors nécessaire. On doit en plus considérer que l'influence de l'aval sur l'amont remet, au moins en théorie, la validité de la relation (31) en cause puisque la pression en J dépend alors aussi de la distribution de $\rho_e u_e \delta^*(X_L)$ pour $L > J$.

Cependant pour le cas du calcul présenté en (V) les dérivées $\text{grad } p(X_J)$ et $\theta(X_J)$ ont été évaluées en négligeant les points en aval, soit :

$$\text{grad } p_{J-1/2} = \frac{p(X_J) - p(X_{J-1})}{\Delta x}$$

$$\theta_{J-1/2} = f(\rho_e u_e \delta^*/X_J) - \rho_e u_e \delta^*(X_{J-1})$$

La méthode la plus directe pour obtenir la dérivée $d \text{ grad } p/d\theta$ consiste à faire deux calculs successifs au point X_J en perturbant la valeur de $\rho_e u_e \delta^*$ au point J. Cette méthode nécessite alors deux calculs de couche limite par iteration de couplage.

L'étude de la relation de comportement (III.2) a montré que le terme de sensibilité S (pente de la normale à la courbe $\rho_e u_e \delta^*/p$) changeait de signe lors du décollement. Il est alors intéressant de relier S au C_f pour éviter le double calcul de couche limite :

$$S^k(J) \propto C_f^k(J) \quad (33)$$

Le coefficient de proportionnalité est calculé en divers points du champ par un double calcul de la couche limite comme indiqué précédemment et la relation (33) fournit une bonne approximation pour les autres points.

V. RESULTATS ET DISCUSSIONS

V.1. Résultats

Le calcul présenté est relatif au cas expérimental étudié par LAW [10] et qui a servi de standard pour divers calculs d'interaction soit en méthode de couche limite [5, 22] soit par résolution des équations de Navier-Stokes [6, 7]. Le maillage utilisé est de 60×60 , le pas en x est constant, le pas en y variable avec un coefficient d'expansion de $K = 1.120$:

$$\Delta Y(I+1) = K \Delta Y(I)$$

La question du maillage au voisinage de la charnière n'a pas été abordée. Le calcul est effectué sur paroi plane, la déviation intervient simplement au niveau de l'écoulement externe, c'est-à-dire que le cas de calcul est relatif à l'interaction par choc incident et non pas

par déviation de la paroi. L'équivalence entre les deux modes de comparaison est bien établie en laminaire car l'interaction s'étend sur un domaine relativement grand par rapport à l'épaisseur de couche limite et donc par rapport à la maille en X. Dans le cas présent l'équivalence n'est pas assurée, comme en témoigne le calcul de SHANG et HANKEY {27} effectué pour les deux modes de compression.

Les données du calcul sont $M_\infty = 2.96$, le nombre de Reynolds à la charnière de $Re = 10^7$, le nombre de Prandtl $Pr = 0,725$. Le domaine de calcul s'étend de $X_o/X_c = 0,88$ à $X_{max}/X_c = 1,124$ et $Y_{max}/X_c = 0,07$.

La viscosité dynamique est approximée par une loi en puissance :

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{0.76} \quad (34)$$

Les deux profils initiaux sont donnés par un calcul de couche limite direct {25}. Le calcul d'interaction est initialisé par une première itération effectuée en méthode directe à gradient de pression nul. La pression imposée dans les itérations de couplage est imposée en $X=X_{max}$ et égale à la pression à l'infini aval fournie par la relation (22). Compte tenu de la sous relaxation appliquée dans la relation de couplage la pression infini aval n'est atteinte qu'au bout de 7 itérations. La valeur imposée est ensuite dépassée puis converge lentement (fig.8). L'évolution de p et du C_f avec le nombre d'itérations est présentée sur la figure suivante (fig.9). La pression pariétale finale est présentée sur la figure 10 en comparaison avec les résultats expérimentaux et ceux obtenus par divers auteurs {5,6,7}. Le C_f final est présenté figure 11.

Le temps de calcul nécessaire pour obtenir une convergence de 0,5% sur la pression finale est de 12 minutes sur IBM 370/168 ce qui correspond à 40 itérations de couplage environ.

V.2. Discussion

L'observation des résultats que ce soit la pression pariétale ou le C_f (fig. 10, 11) montre des écarts importants entre les divers résultats obtenus. L'approximation de couche limite, dont la validité semblait douteuse à la suite des travaux de WERLE et BERTKE, ne semble pas devoir

être remise en cause. Il semble que dans le cas cité l'algorithme de couplage (méthode directe/couplage en δ^*) soit plus vraisemblablement à l'origine du résultat très décevant.

Le modèle de turbulence employé dans le présent calcul se rapproche très nettement de celui de HUNG et MAC CORMACK, la différence se situant au niveau du modèle interne ;

$$\begin{array}{ll} \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| & \text{présent calcul} \\ \rho l^2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right)^{1/2} & \text{HUNG et MAC CORMACK \{7\}} \end{array}$$

Cette différence semble assez mineure et les différences entre les calcul de HUNG et MAC CORMACK et le présent calcul peuvent avoir plusieurs origines :

- 1) la cause la plus probable est liée à la résolution numérique faite sur paroi plane, c'est-à-dire que le cas traité est celui de l'interaction par choc incident. Le calcul comparatif d'une interaction par choc incident et par déviation de la paroi {27} montre que dans le premier cas la distribution de pression pariétale est décalée vers l'amont, ce qui correspond bien au résultat, et que le minimum du C_f avant le recollement est lui moins prononcé ce qui est également observé.

On peut aussi citer :

- 2) des questions relatives au maillage (60 pas en y dans le présent calcul, 31 seulement dans le calcul de HUNG et MAC CORMACK pour la couche dissipative et une part de l'écoulement non visqueux).
- 3) La définition des grandeurs telle que u_e , la valeur à la frontière de la couche limite, en méthode de Navier-Stokes, (SHANG et HANKEY utilisent u_{\max} qui semble se situer en dehors de la couche limite)
- 4) L'approximation $dp/dy = 0$ de couche limite

L'obtention des résultats présentés est assez récente et il n'a pas encore été effectué de tests comparatifs en particulier l'évaluation des termes négligés dans l'équation de quantité de mouvement normale

à la paroi. Ces contrôles ainsi qu'un effort sur la modélisation des termes turbulents seront entrepris ultérieurement. La rapidité du calcul autorise en effet une étude plus systématique des modèles de turbulence dont l'importance est évidente pour le traitement des écoulements décollés.

VI. CONCLUSION

Une méthode de calcul de l'interaction onde de choc/couche limite a été développée. Elle utilise le concept de couche limite formulée en méthode inverse, la condition à la limite imposée est le produit $\rho_e u_e \delta^*$. Cette condition limite semble constituer le meilleur choix, malgré la relative complexité qu'elle entraîne au niveau de l'intégration de la couche limite, car d'une part le couplage conserve un caractère subcritique à des nombres de Mach élevés en écoulement turbulent, et d'autre part l'existence et l'unicité de la relation paraît assurée dans les régions de forts gradients, décollement inclus.

L'algorithme de couplage basé sur le comportement local de la couche limite prend implicitement en compte une condition imposée à l'aval pour le problème couplé. Les durées de calcul sont extrêmement compétitives, par rapport à une résolution des équations de Navier-Stokes complètes ce qui autorise l'emploi d'un maillage serré (60x60) sur un mini-calculateur.

Des divergences apparaissent par rapport aux méthodes exactes (NS) mais il n'est pas possible d'en tirer de conclusion définitive, le mode de production de l'interaction OC/CL n'étant pas le même (choc incident/déviation de la paroi).

Plusieurs applications sont prévues ou en cours actuellement. En premier lieu le raccordement à une méthode exacte de l'écoulement externe (caractéristiques). Une extension à des écoulements tridimensionnels est également prévue. Enfin un gros effort doit être consenti envers la modélisation de la turbulence dont l'importance paraît primordiale pour une prévision "raisonnable" de l'écoulement.

Ce travail a été soutenu par la Direction des Recherches, Etudes Techniques sous le contrat n° 78/240.

- REFERENCES -

- {1} LEES L., REEVES B.L.
Supersonic separated and reattaching laminar flows.
AIAA Journal Vol.2, n°10 1964
- {2} KLINEBERG J.M., LEES L.
Theory of laminar viscous-inviscid interactions in
supersonic flow.
AIAA Journal Vol.7, n°2 1965
- {3} AYMER de La CHEVALERIE D.
Application d'une méthode intégrale au calcul d'inter-
actions onde de choc-couche limite turbulente en
écoulements faiblement supersoniques.
Thèse 3ème cycle, Université de Poitiers 1976
- {4} WERLE M.J., VATSA V.N.
New method for supersonic laminar boundary layer
separations.
AIAA Journal Vol.12, n°11 1974
- {5} WERLE M.J., BERTKE S.
Application of an interacting boundary layer model to
the supersonic turbulent separation model.
Report AFL n°76.4.21 University of Cincinnati 1976
- {6} SHANG J.S., HANKEY W.L.
Numerical solution of the Navier-Stokes equations for
supersonic turbulent flow over a compression ramp.
AIAA Paper n°75-3 1975
- {7} HUNG C.M., MAC CORMACK R.W.
Numerical simulation of supersonic and hypersonic
turbulent compression corner flows.
AIAA Journal Vol.15, n°3 1977
- {8} ARDONCEAU P., LEE D.H., ALZIARY T., GOETHALS R.
Turbulence behaviour in a shock wave/boundary layer
interaction.
AGARD CP 271 1979
- {9} GARVINE R.
Upstream influence in viscous interaction problems.
Physics of Fluid Vol.11, n°7 1968
- {10} LAW C.H.
Supersonic turbulent boundary layer separation.
AIAA Journal Vol.12, n°6 1974
- {11} VAN DYKE M.
Perturbation methods in fluid mechanics.
Applied Mathematics and Mechanics Vol.8 1964

- {12} VAN DYKE M.
Higher order approximations in boundary layer theory.
Journal of Fluid Mech., Vol.14, P.2 1962
- {13} ALZIARY de ROQUEFORT T.
Couplage fort et couplage faible entre couche limite
et écoulement extérieur.
13e Colloque Association Aéronautique et Astronautique
de France. 1976
- {14} LE BALLEUR J.C.
Calculs couplés visqueux-non visqueux incluant décol-
lement et onde de choc en écoulement bidimensionnel.
AGARD LS 94 1978
- {15} WEINBAUM S., GARVINE R.W.
On the two dimensional viscous counterpart of the one
dimensional sonic throat.
Journal of Fluid Mechanics Vol.39, P.1 1969
- {16} LE BALLEUR J.C.
Détermination des effets de couplage entre écoulement
de fluide parfait transsonique et couche limite.
Rapport ONERA N2/3073 AY 1977
- {17} CEBECI T., SMITH A.M.O., MOSINSKIS G.
Calculation of compressible adiabatic turbulent boundary
layers.
AIAA Journal Vol.8, n°11 1974
- {18} KLINEBERG J.M., STEGEK J.L.
On laminar boundary layer separation.
AIAA Paper n°74-94 1974
- {19} CARTER J.E.
Solutions for laminar boundary layers with separation
and reattachment.
AIAA Paper n°74-583 1974
- {20} ARLONCEAU P.L., ALZIARY de ROQUEFORT T.
Direct and inverse calculation of the laminar boundary
layer solution.
AIAA Journal (to be published Nov.1980) 1980
- {21} REYNER T.A., FLUGGE LOTZ I.
The interaction of a shock wave with a laminar boundary
layer.
Int. Journal of Non Linear Mech. Vol.13 1968
- {22} LE BALLEUR J.C., PEYRET R., VIVIAND H.
Numerical studies on high Reynolds number aerodynamics.
Computers and Fluids Vol.8 1980
- {23} BLOTTNER F.G.
Computational techniques for boundary layers.
AGARD LS73 1975

- {24} CEBECI T., KELLER H.B., WILLIAMS P.G.
Separating boundary layer flow calculations.
Journal of Comp. Physics n°31 1979
- {25} HARRIS J.E.
Numerical solution of the equations for compressible
laminar, transitional and turbulent boundary layers
and comparison with experimental data.
NASA TR-R-368 1961
- {26} DAVIS R.T., WERLE M.J., WORNOM S.F.
A consistent formulation of the compressible boundary
layer theory with second order curvature and displacement
effects.
AIAA Journal Vol.8, n°9 1970
- {27} SHANG J.S., HANKEY W.L.
Supersonic turbulent separated flows utilizing the
Navier Stokes equations.
AGARD CP 168 1975

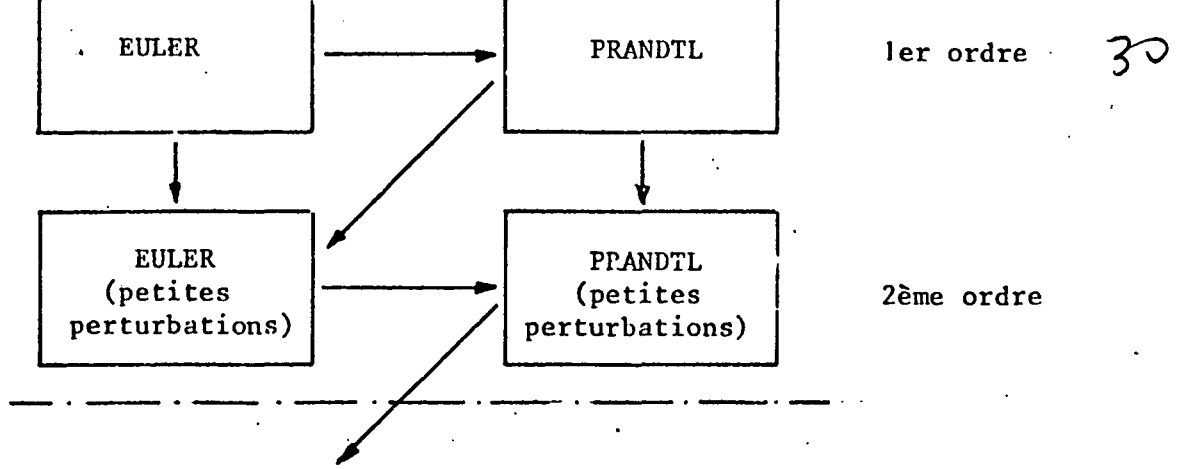


FIG.1 - Couplage régulier (hiérarchique) entre la couche limite et l'écoulement externe -

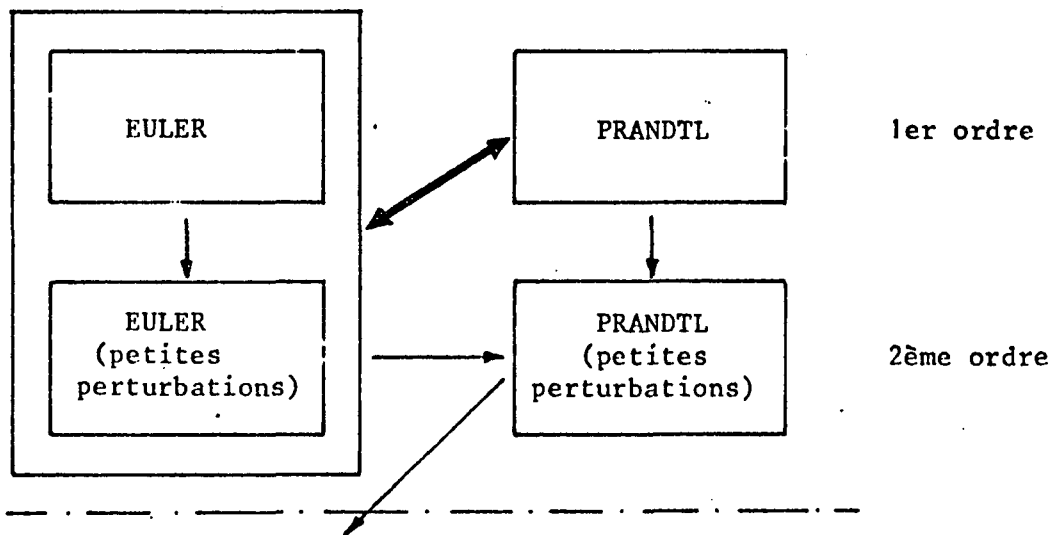


FIG.2 - Couplage singulier (simultané) entre la couche limite et l'écoulement externe -

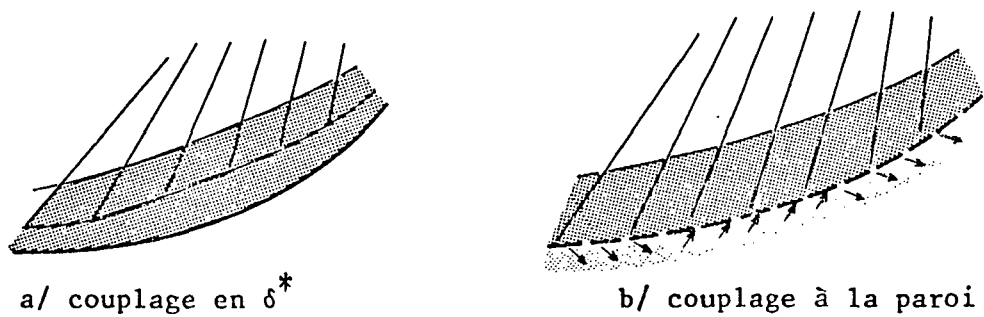


FIG.3 - Interprétation physique du couplage en δ^* et à la paroi -

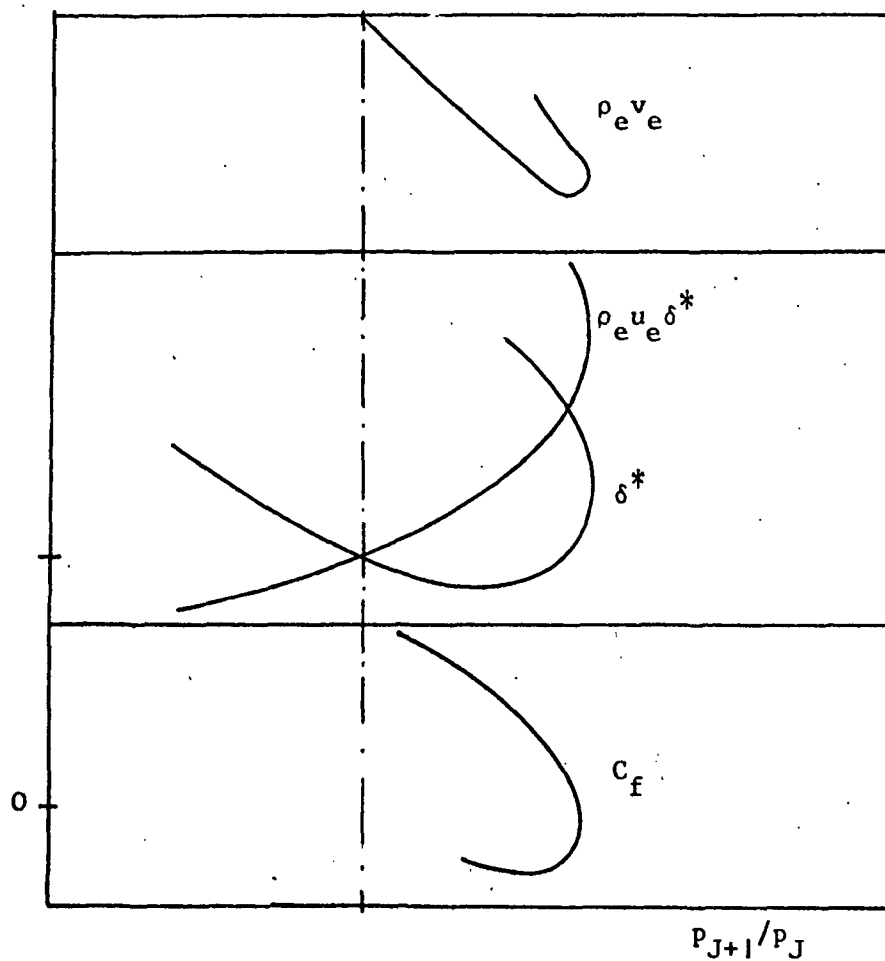


FIG.4 - Relation locale de comportement entre $\rho_e v_e$, δ^* , $\rho_e u_e \delta^*$, le C_f et la pression -

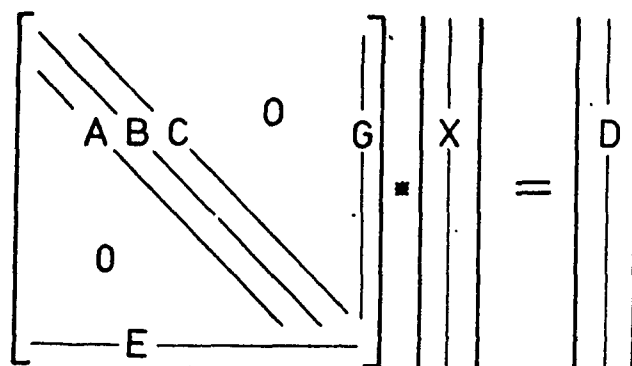


FIG.5 - Structure de la matrice en méthode inverse (δ^* ou $\rho_e u_e \delta^*$ imposé) -

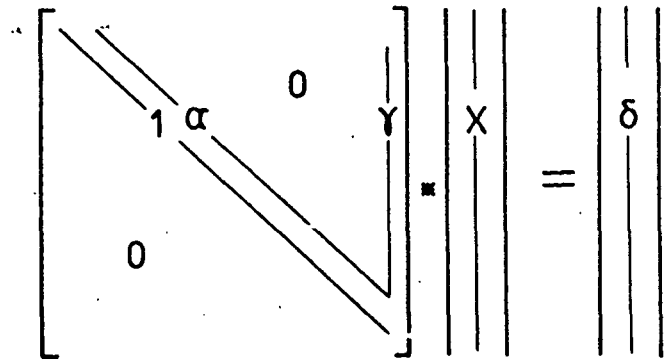


FIG.6 - Structure de la matrice après réduction

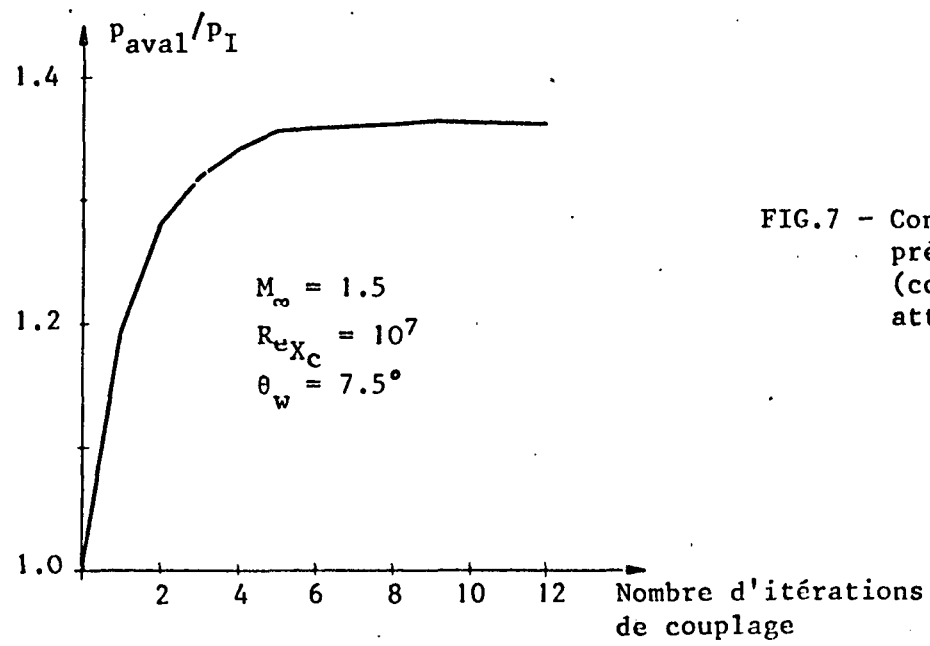


FIG.7 - Convergence de la pression finale (couche limite attachée)

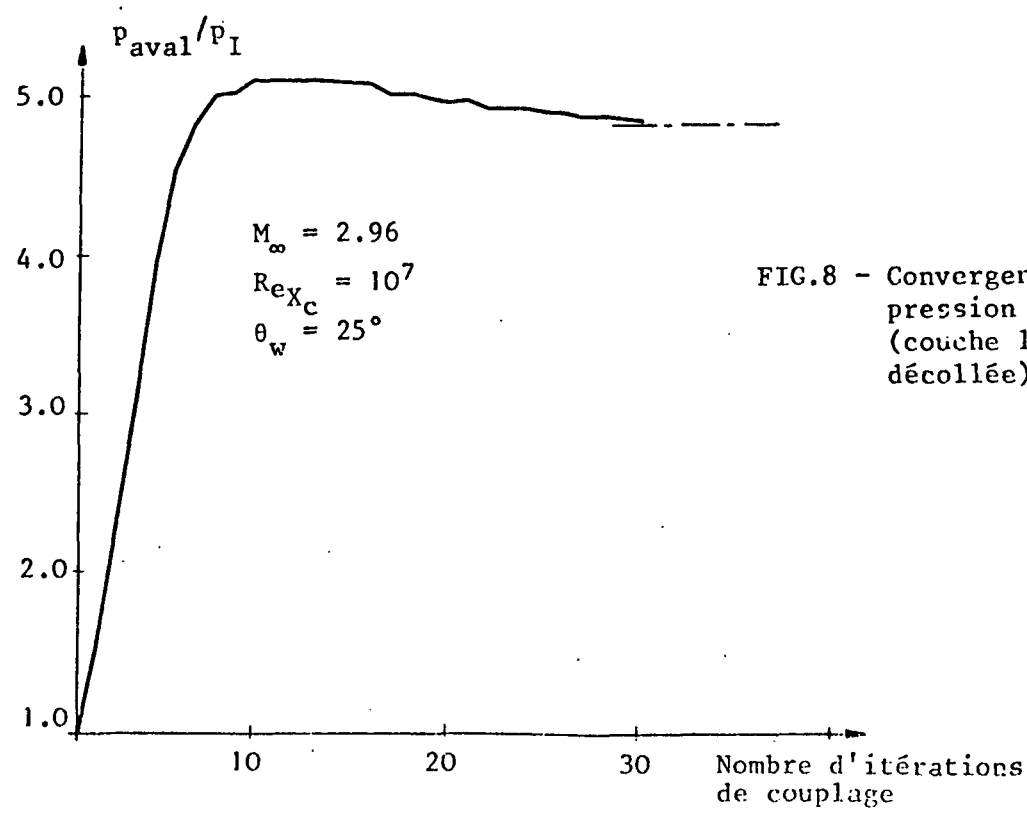


FIG.8 - Convergence de la pression finale (couche limite décollée)

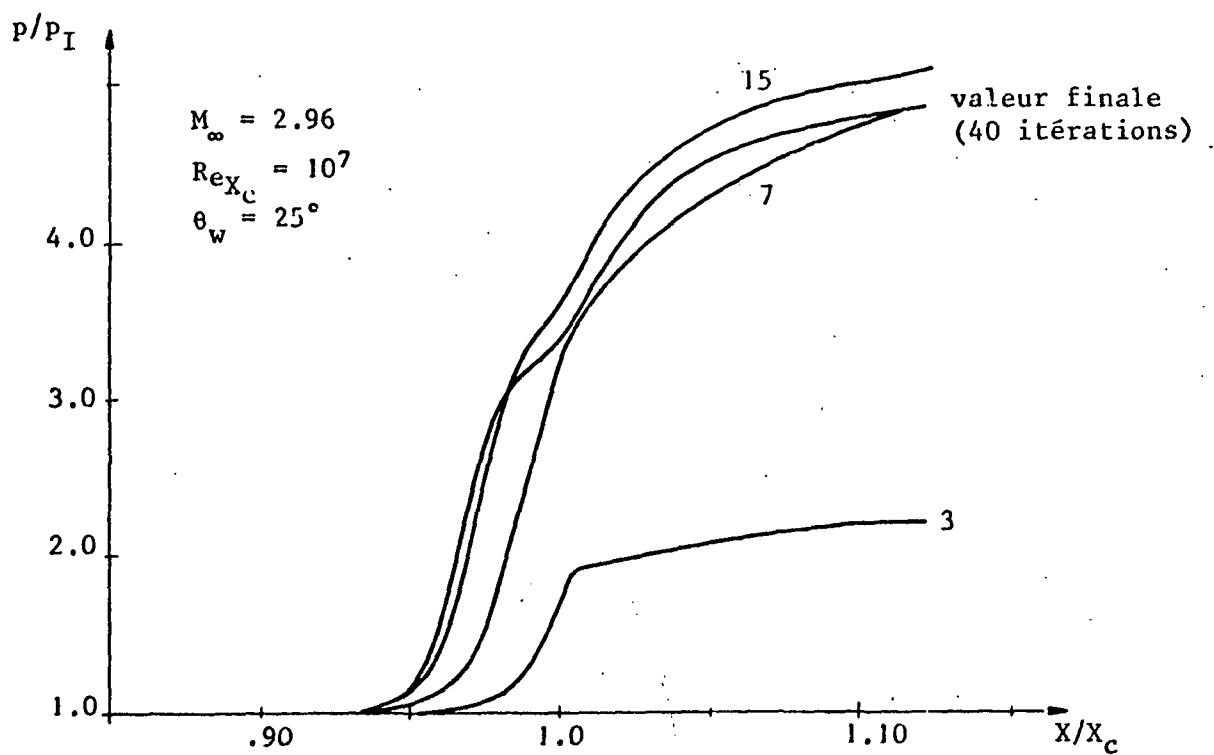


FIG.9a - Convergence de la distribution de pression pariétale -

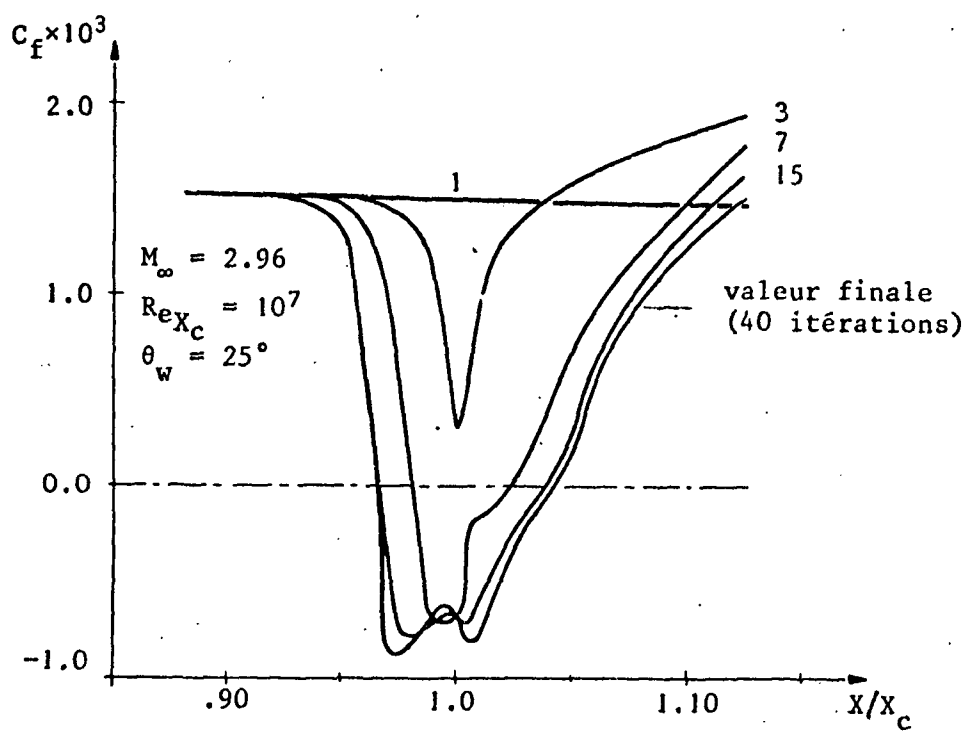


FIG.9b - Convergence de la distribution de C_f -

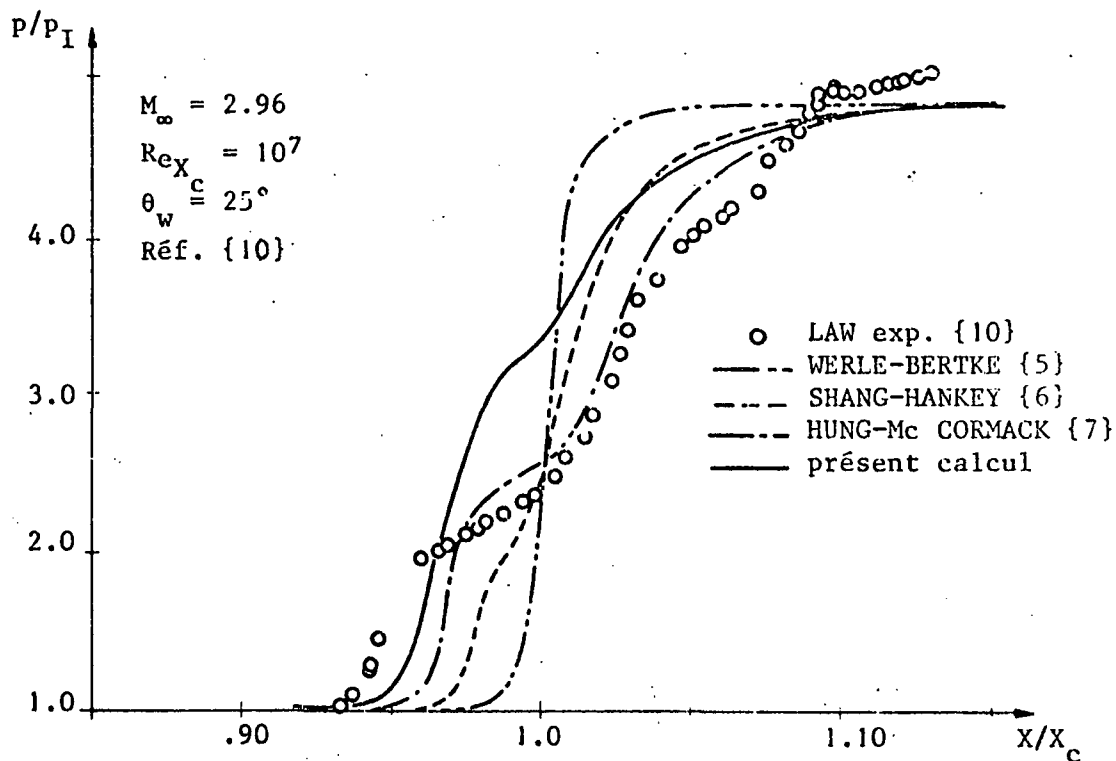


FIG.10 - Comparaison entre les distributions de pression pariétale (Modèle de turbulence en "équilibre") -

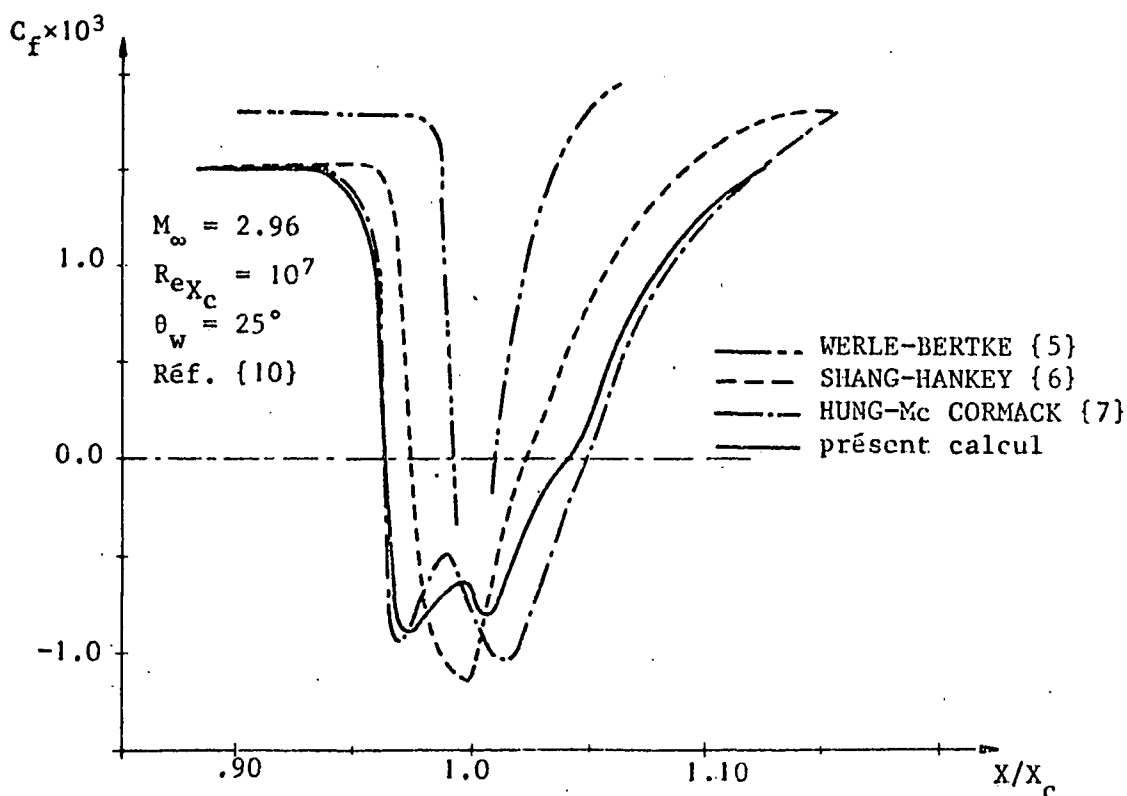


FIG.11 - Comparaison entre les distributions de C_f (Modèle de turbulence en "équilibre")